



Colle du 14/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2. Etudier $f : x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.



Colle du 14/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ n'est pas un multiple de 4.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f définit une bijection de \mathbb{R} dans un ensemble que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f .
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1} .



Colle du 14/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists! (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$ paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^6 + x^4 = 810$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$